Всероссийская олимпиада школьников по МАТЕМАТИКЕ 2025-26 года
Муниципальный этап
7 класс

Инструкция по выполнению работы

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ****. Ответ может быть числовой, может быть строкой текста или рисунком. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов. Условия задач можно оставить себе.*** *Пользоваться калькулятором НЕ разрешается.*

Максимальное количество баллов — 100.

Время выполнения заданий — 240 минут.

Желаем успеха!

Задания

Задача 1. Черепаха Тортилла хвастается, что разгоняется до 5 км/день. Однако она использует свою систему мер: считает, что в километре 800 м, а в сутках — 30 часов. Какова её реальная скорость в обычных км/день?

Задача 2. Вычислите $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}}{\frac{3}{1}+\frac{5}{3}+\frac{7}{5}}$.

Задача 3. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого используются только цифры 2, 3 и 5, причем каждая из них хотя бы по одному разу, и которое делится нацело на 18.

Задача 4. Найдите семь последовательных **целых** чисел, таких, что сумма первых двух из них равна сумме последних трёх.

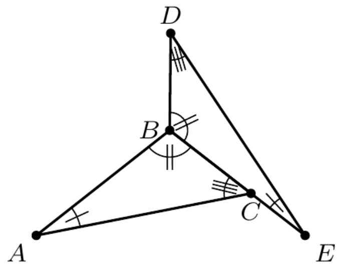
Задача 5. Робот-уборщик обнаружил на орбите сгусток из 210 болтов и гаек. Чтобы его утилизировать, робот может за одну манипуляцию либо приварить к сгустку простое количество болтов или гаек, либо отпилить и выбросить кусок, состоящий из квадрата целого числа одинаковых элементов (если такое количество в сгустке есть). За какое минимальное число манипуляций робот может превратить сгусток в один элемент (болт или гайку)? Напомним, что натуральное число, большее 1, называется простым, если оно делится только на 1 и на само себя.

Задача 6. У Андрея в двух банках лежали некоторые суммы денег. Андрей дополнительно внес одну и ту же сумму денег на счет в каждом банке. После этого сумма вклада в первом банке стала составлять 70% от суммы вклада во втором. Затем Андрей еще раз внес такую же сумму на оба счета, и после этого сумма вклада в первом банке стала составлять уже 80% от суммы вклада во втором. Во сколько раз сумма вклада во втором банке изначально была больше, чем в первом?

Задача 7. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между семью цифрами 9 1 1 2 0 2 5 знаки арифметических действий (+, –, ×, ÷) так, чтобы значение получившегося выражения стало равно 151. Можно использовать скобки. *В ответ запишите все выражение целиком. Цифры можно объединять в числа.*

Задача 8. В хоккейном чемпионате участвовали 24 команды. Они были разбиты на две конференции по 12 команд, а каждая конференция разбита на два дивизиона по 6 команд. Каждая команда играла по 6 раз со всеми командами из своего дивизиона, по 4 раза со всеми командами из своей конференции, но не из своего дивизиона, и по 2 раза со всеми командами другой конференции. Сколько всего игр было в этом чемпионате?

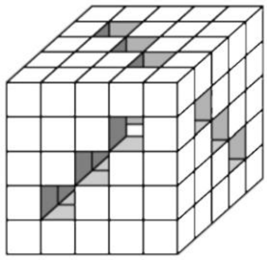
Задача 9. Робот выполняет команды «В» (вперёд) и «С» (стоп). Выполнив очередную команду, он дописывает ее букву в журнал. Тем самым, после выполнения всех команд, в его журнале оказывается записана последовательность букв, каждая из которых — В или С. В этой последовательности пара подряд идущих букв «СВ» встречается 8 раз. При этом тройка подряд идущих букв «СВС» встречается 3 раза, а тройка «СВВ» — 4 раза. Какими могут быть последние две команды в журнале? *Если возможных ответов больше одного, укажите их все.*



Задача 10. На рисунке изображены два равных треугольника: ABC и EBD. Оказалось, что $\angle DAE = \angle DEA = 37°$. Найдите угол BAC. *Картинка приведена только для пояснения, длины отрезков и углы на ней не соответствуют условию задачи.*

Задача 11. Паша придумал два различных натуральных числа и посчитал их произведение. Затем он увеличил каждое из придуманных чисел на 3, и снова посчитал их произведение. Оказалось, что оно увеличилось на 21. Чему равно произведение двух новых чисел?

Задача 12. В танцевальной студии занимаются 10 мальчиков и 10 девочек. Из них нужно выбрать два мальчика и две девочки, чтобы отправить на соревнования. Сколькими способами можно это сделать?



Задача 13. Миша играл в Майнкрафт и собирал из одинаковых кубических блоков конструкцию, показанную на рисунке. Эта конструкция представляет из себя куб 5×5×5 с девятью сквозными прямыми туннелями, проходящими от грани до грани куба. Весь остальной объем, кроме туннелей, заполнен блоками. Сколько блоков использовал Миша?

Задача 14. Сколько существует натуральных чисел, у которых неполное частное от деления на 2025 равно остатку?

Задача 15. В школе 60% детей любят математику, а остальные не любят. Среди тех, кто любит математику, 80% говорят, что любят ее, а остальные говорят, что не любят. Среди тех, кто не любит математику, 90% говорят, что не любят ее, а остальные говорят, что любят. Какова доля тех, кто любит математику, среди тех учеников, которые говорят, что не любят ее? Ответ можно дать в виде дроби, или в процентах.

Задача 16. Даша написала программу, которая выводит по возрастанию все натуральные числа, кубы которых делятся на 2025. Какое число выведет Дашина программа 2025-м по счету?

Задача 17. Все десять натуральных чисел от 1 до 10 расставлены по кругу. **а)** (2 балла) Для какого наименьшего натурального числа N существует такая расстановка этих десяти чисел, в которой любые два соседних числа отличаются не больше, чем на N? **б)** (3 балла) Приведите пример такой расстановки для найденного числа N.

Задача 18. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AB отмечена точка E, а на отрезке BL — точка D. Известно, что $DL = LC$, а отрезок ED параллелен стороне AC. Найдите длину отрезка ED, если $AE = 25$, $AC = 19$.

Задача 19. Пятизначное число делится на 7. Какую наибольшую сумму цифр оно может иметь?

Задача 20. Дима задумал натуральное число, которое делится на 10 и имеет ровно 10 натуральных делителей (включая 1 и само число). Какое число мог задумать Дима? *Если у задачи несколько ответов, укажите их все*.

8 класс

1. В физкультурном зале находятся тренер и несколько спортсменов. Возраст тренера на 40 лет больше среднего возраста спортсменов и на 35 лет больше среднего возраста всех присутствующих (включая его самого). Сколько спортсменов в зале?

2. Могут ли суммы цифр двух соседних натуральных чисел (то есть чисел n и $n+1$) отличаться *а*) на 2024?; *б*) на 2025?

3. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наименьшей*, и укажите её значение.

4. Пятьдесят команд сыграли однокруговой турнир за 49 дней, каждая команда сыграла с каждой, играя по одному матчу в день. За победу в матче давали 3 очка, а за ничью – одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа её поражений, либо вдвое меньше числа её побед. Больше всех очков набрал «Зенит». Докажите, что и за два дня до конца соревнования у «Зенита» очков было больше, чем у любой другой команды.

5. В треугольнике ABC угол C равен $60°$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AB = AQ + BP$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

2. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \ldots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наибольшей*, и укажите её значение.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 400?

4. На вечеринке собрались 10 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K. Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Сколько существует 10-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 7?

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдётся такое действительное число y, что $f(x) = f(y) + y$. Найдите наименьшее возможное значение a.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 800?

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Сколько существует 11-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

2. Все члены геометрической прогрессии — целые числа. Верно ли, что сумма квадратов *а*) трёх; *б*) четырёх последовательных членов этой прогрессии всегда делится на сумму этих членов?

3. Пусть x, y, z — различные целые числа такие, что $xy+yz+zx = 47$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q, причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.